Handelshochschule
Stockholm

OTTO VON GUERICKE UNIVERSITÄT MAGDEBURG

INF FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Simulation, Animation und Simulationsprojekt

Thema 5: Standardverteilungen

Dr. Henry Herper – Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg – SS2019

Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung, die auch als **negative Exponentialverteilung** bezeichnet wird, wird häufig zur Beschreibung von Warteschlangensystemen genutzt, insbesondere um das Ankunftsverhaltens der Kunden zu abzubilden. Diese Verteilung wird mit **XPDIS** bezeichnet. Die Funktion FN$XPDIS erzeugt Zwischenankunftszeiten (IAT) für Kunden, deren mittlere Zwischenankunftszeit 1 ist.

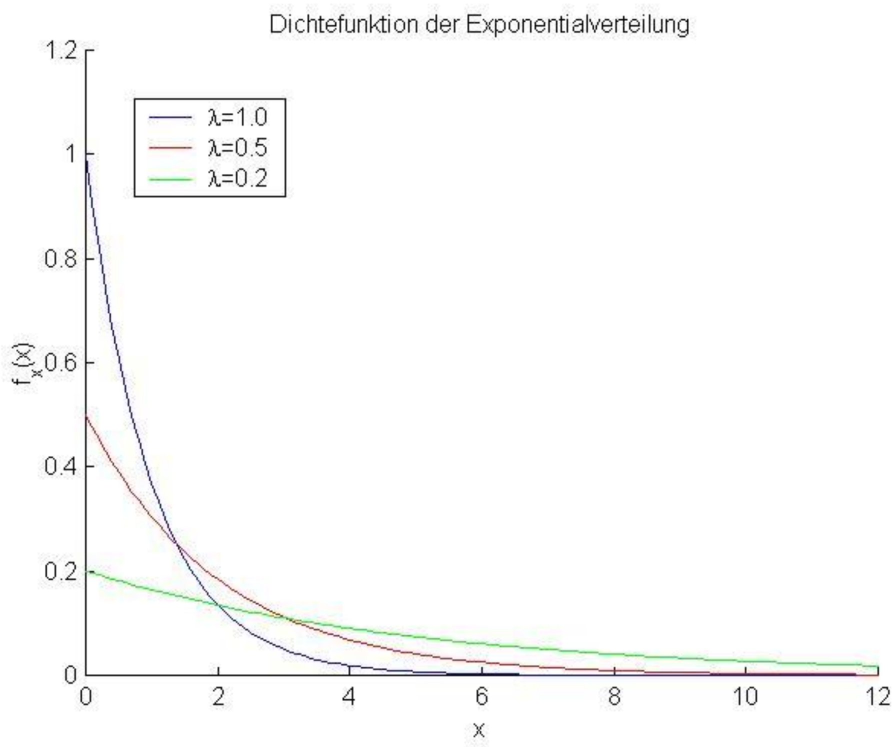
Für die Berechnung der Werte werden die Zufallszahlen des Zufallszahlengenerators RN2 genutzt.

Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung, mit der die zeitlichen Abstände eines ungestörten, poissonverteilten Verkehrsstroms beschrieben werden können. Daraus werden Formeln zur Leistungsfähigkeit von Verkehrsknoten abgeleitet. Sie wird auch bei Lebensdauer- und Zuverlässigkeitstests eingesetzt.

Erwartungswert: $1/\lambda$

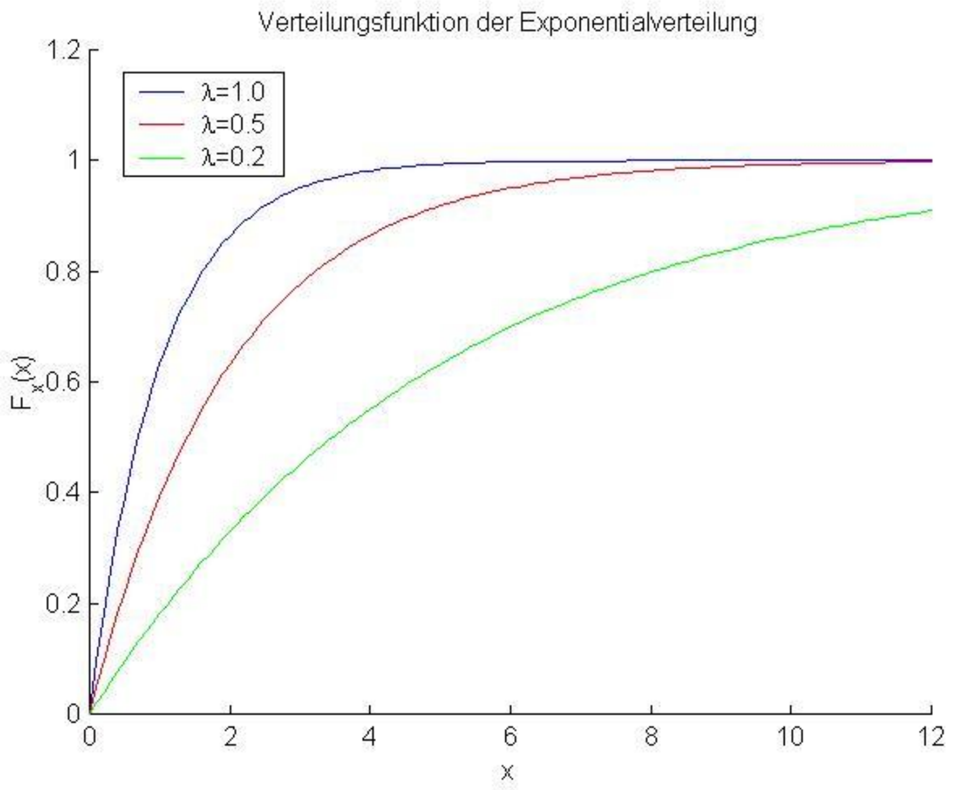
Exponentialverteilung



Dichtefunktion:

$$f_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x \geq 0, \quad \lambda > 0 \end{cases}$$

Exponentialverteilung



Verteilungsfunktion:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0, \quad \lambda > 0 \end{cases}$$

Exponentialverteilung

Diese Verteilung kann schrittweise von sehr elementaren Annahmen abgeleitet werden. Wir nehmen an, dass x Kunden in einer Minute an einem Laden vorübergehen und dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde den Laden betritt, $1/x$ ist. Dann wird durchschnittlich ein Kunde pro Minute den Laden betreten und die durchschnittliche Zwischenankunftszeit ist eine Minute. Nehmen wir als nächstes an, dass x sehr groß ist und sich die Wahrscheinlichkeit von $1/x$ sich demzufolge entsprechend verringert, so dass wir immer noch eine Zwischenankunftszeit von 1 Minute haben, so können wir die Exponentialverteilung verwenden.

Exponentialverteilung

Die Exponentialfunktion ist eine stark **verschobene** Funktion. Obwohl die mittlere Zwischenankunftszeit 1 Minute ist, werden 39% der Kunden mit einer Zwischenankunftszeit < 0.5 Minuten erzeugt. Für 63% der Kunden wird eine Zwischenankunftszeit < 1 Minute beobachtet. Eine Zwischenankunftszeit < 2 Minuten wird für 86% der Kunden beobachtet. Daraus folgt, dass 14% der Kunden eine Zwischenankunftszeit von mehr als 2 Minuten haben. Davon beobachten wir für 2% eine Zwischenankunftszeit von mehr als 4 Minuten und für 0.03% eine Zwischenankunftszeit von mehr als 8 Minuten.

GENERATE FN$XPDIS

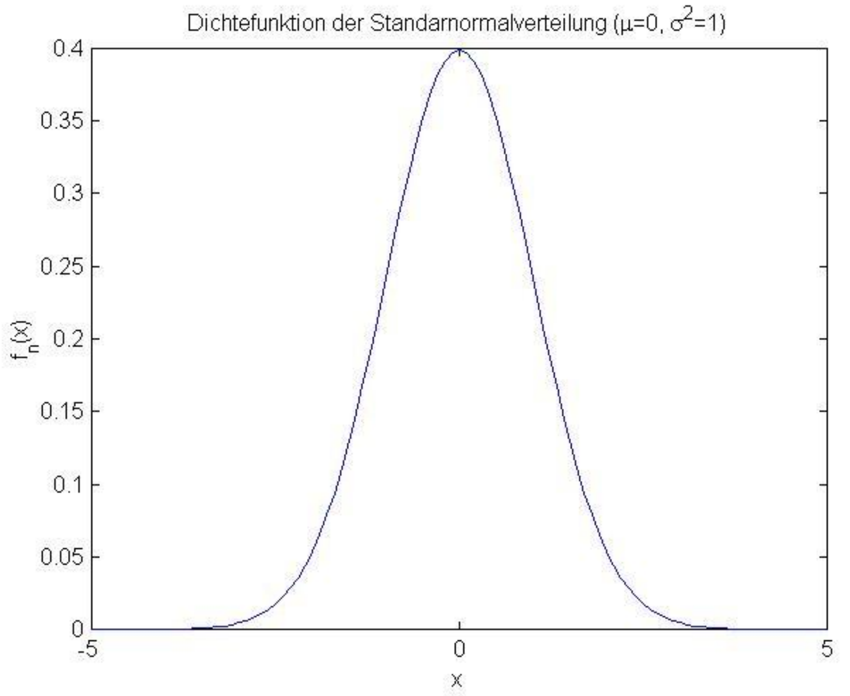
Normalverteilung

Die Normalverteilung ist symmetrisch.

Das bedeutet, der Mittelwert hat die höchste Wahrscheinlichkeit und die Abnahme der Wahrscheinlichkeiten nach links und nach rechts gleich ist. Die Normalverteilung hat die Form einer Glocke. Daraus ergibt sich, dass Werte, die weit vom Mittelwert entfernt sind, eine geringe Wahrscheinlichkeit haben.

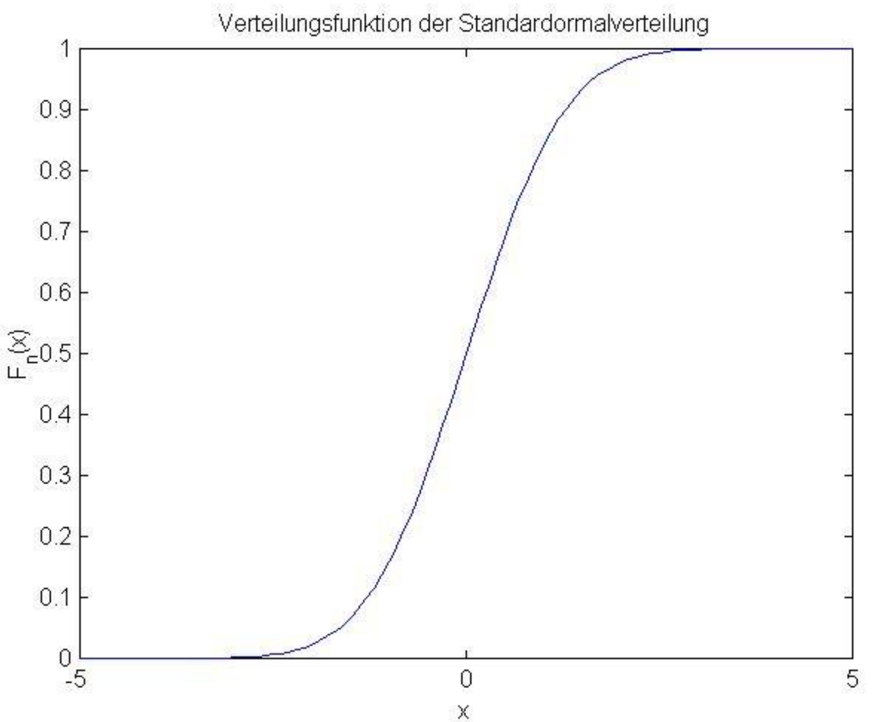
Die Verwendung dieser Normalverteilung, mit der allmählichen Abnahme der Wahrscheinlichkeiten der Werte mit der Entfernung vom Mittelwert, ist häufig realistischer, als die Verwendung der Gleichverteilung.

Normalverteilung - Dichtefunktion



Dichtefunktion: $$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Normalverteilung - Verteilungsfunktion



Verteilungsfunktion: $$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Normalverteilung- Beispiel

Soll die Bedienzeit zwischen 20 und 30 Minuten liegen, so bedeutet das in der Regel, dass die Masse der Werte in diesem Bereich liegt, aber ein geringer Teil der Werte auch außerhalb dieses Bereiches liegen kann.

In dieser Situation wird die Normalverteilung anwendbar. Es wird angenommen, dass 95% der Bedienzeiten zwischen 20 und 30 Minuten liegen. Die Normalverteilung hat die Eigenschaft, dass 95% aller Werte zwischen $\mu-2\sigma$ und $\mu+2\sigma$ liegen, wobei μ der Mittelwert und σ die Standardabweichung ist.

In unserem Beispiel bedeutet dies, dass $\mu = 25$ und $\mu-2\sigma = 20$. Daraus folgt, dass $\sigma = 5/2 = 2.5$ ist. Es ist somit einfach, die Normalverteilung zu parametrisieren, wenn man annehmen kann, dass 95% der Zeiten in den Grenzen liegen.

Normalverteilung- Beispiel

Haben wir die beiden Parameter μ und σ der spezifischen Verteilung festgelegt, so können wir in WinGPSS Zeiten entsprechend dieser Verteilung mit folgenden zwei Schritten erzeugen:

1. Wir berechnen einen Wert *s* von einer standardisierten Normalverteilung mit einem Mittelwert $\mu = 0$ und einer Standardabweichung $\sigma = 1$. Um diese Werte für *s* zu erzeugen, verwenden wir die Funktion FN$SNORM, welche einen Wert zwischen -5 und 5 berechnet. In 95% der Fälle erhalten wir Werte zwischen -2 und 2.

2. Wir berechnen den gewünschten Wert aus den Parametern μ und σ und dem Wert für *s.* Der aktuelle Abstand zum Mittelwert ist die Standardabweichung σ. Wenn die Standardabweichung $\sigma = 2.5$ ist, so erhalten wir zum Beispiel für $s = 0.8$ einen Abstand von $0.8 * 2.5 = 2$ vom Mittelwert. Die Zeit berechnet sich dann entsprechend der Gleichung $\mu + s * \sigma = 25 + 2 = 27$.

Syntax: **ADVANCE 25+2.5*FN$SNORM**

Beispiel 10.1 - Bestandshaltung

Untersuchung von Bestands- und Bestellstrategien für ein spezielles Buch in einer studentischen Buchhandlung.

Durchschnittlich wird pro Tag ein Buch verlangt. Die Zeit zwischen der Ankunft zweier Studenten, die nach diesem Buch fragen, ist exponentialverteilt. Ist das Buch nicht vorrätig, so kann sich der Student in eine Bestelliste eintragen. Sowie neue Bücher eintreffen, wird das bestellte Buch an seine Heimatadresse geschickt. 40% der Studenten nutzen diesen Service. Die verbleibenden 60% gehen statt dessen in eine andere Buchhandlung.

Beispiel 10.1 - Bestandshaltung

Am Anfang des Jahres haben wir einen Bestand von 30 Büchern in der Buchhandlung. Jeden fünften Werktag überprüft ein Bestandsmanager, ob der Bestand auf 10 oder weniger Bücher gefallen ist. Stehen **keine** Lieferungen aus, so schickt der Manager in diesem Fall eine Bestellung über 5 Bücher an den Verlag. Das bedeutet, dass der Manager keine Bestellung schickt, wenn er bereits Bücher bestellt hat, diese aber noch nicht in der Buchhandlung eingetroffen sind. Bestellte Bücher benötigen durchschnittlich 10 Tage, bis sie in der Buchhandlung eintreffen. Für 95% der Lieferungen vergehen zwischen der Bestellung der Bücher und dem Eintreffen in der Buchhandlung zwischen 6 und 14 Werktage.

Wir wollen dieses System für die Dauer eines Jahres (250 Werktage) simulieren.

Beispiel 10.1 - Bestandshaltung

Das Programm soll folgende Fragen beantworten:

1. Wie viele Bücher wurden im Laufe des Jahres verkauft?
2. Wie viele Käufer sind durch Wechsel zu einer anderen Buchhandlung verlorengegangen?
3. Wie viele Studenten haben sich in die Bestellliste eingetragen und lassen sich die Bücher nach Hause liefern?
4. Wie viele Bücher wurden im Laufe des Jahres vom Verlag geliefert?
5. Wie lange mussten die Studenten im Durchschnitt von der Bestellung der Bücher bis zur Auslieferung warten?

Erlangverteilung

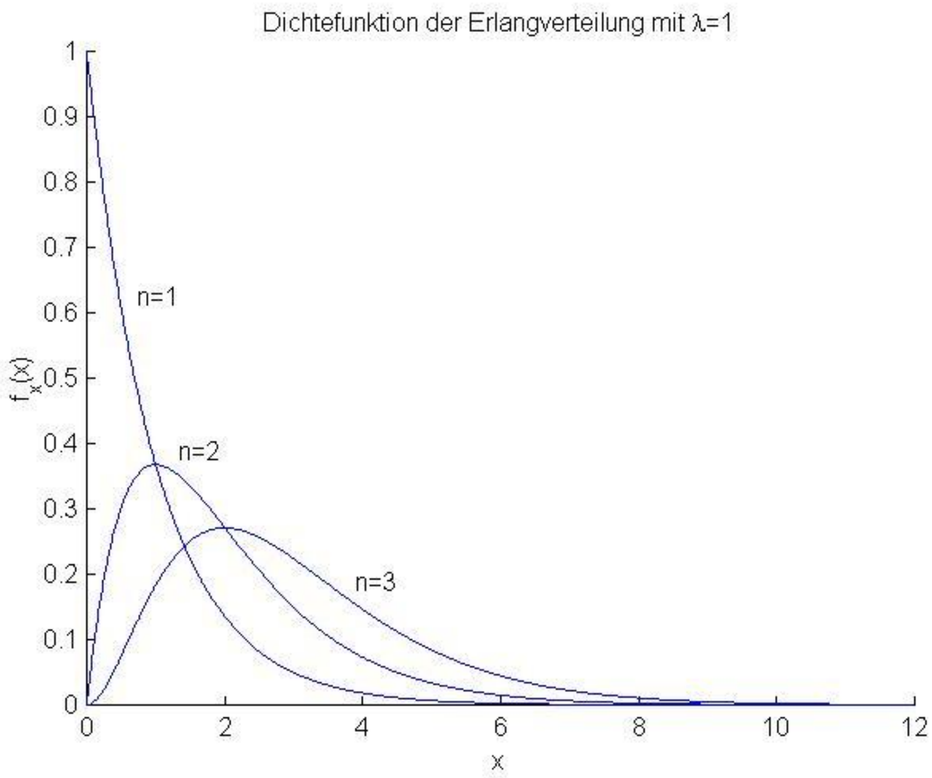
Der Block, ADVANCE 45*FN$RLNG3, beschreibt die aktuelle Kreditlaufzeit.

Die Funktion FN$RLNG3 erzeugt Werte entsprechend der sogenannten Erlangverteilung, die sich in diesem Fall aus **drei** unabhängigen, exponentialverteilten Zufallszahlen mit dem Erwartungswert 1 ergeben. (Die Erlang-Verteilung nutzt RN4 als Standard für die Erzeugung der Zufallszahlen.)

Beispiel:

Die mittlere Zahlungsfrist (Laufzeit des Kredites) beträgt 45 Tage, aber einige Kunden bezahlen früher. Die häufigste Dauer beträgt etwa 30 Tage, aber einige Kunden bezahlen auch wesentlich später. Etwa 5% zahlen sogar erst nach 90 Tagen oder später. Diese Form der Erlangverteilung ist besonders gut geeignet, um das Zahlungsverhalten der Kunden nachzubilden.

Erlangverteilung



Dichtefunktion:
$$f_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{\lambda \cdot e^{-\lambda x}}{(n-1)!}(\lambda x)^{n-1} & x \geq 0, \quad \lambda > 0, \quad n \in N \end{cases}$$

Aufgabe 10.1 - Antiquitätenladen

Ein kleiner Laden kauft Antiquitäten auf und verkauft sie wieder. Personen, die Antiquitäten verkaufen treffen im Laden entsprechend einer negativen Exponentialverteilung mit einem Erwartungswert von 2 Stunden ein. Der Preis, der für ein antikes Stück bezahlt wird, beträgt im Durchschnitt $ 100 und entspricht einer Normalverteilung mit einer Standardabweichung von $ 20. Der Laden zahlt immer bar.

Der Käufer erreichen den Laden ebenfalls entsprechend einer negativen Exponentialverteilung, mit einem Erwartungswert von 5 Stunden. Der Laden verkauft die Antiquitäten durchschnittlich für $ 150 pro Stück. Der Preis schwankt entsprechend einer Normalverteilung mit einer Standardabweichung von $ 25. Die Kunden erhalten einen Kredit von 4 Tagen, jedoch entspricht die tatsächliche Zeit bis zur Bezahlung einer Erlangverteilung mit n=3 und mit einem Erwartungswert von 6.

Aufgabe 10.1 - Antiquitätenladen

Der Laden ist täglich zwischen 9.00 Uhr und 17.00 Uhr geöffnet. Wenn der Laden um 17.00 Uhr geschlossen wird, so werden alle im Laden befindlichen Kunden gebeten zu gehen und am nächsten Tag um 9.00 Uhr wiederzukommen, was sie auch tun.

Die Simulation startet mit einem Warenbestand von $ 10,000 und einem Kassenbestand von $ 50,000.

Wie verhält sich der Waren- und Kassenbestand nach einem Monat mit 30 Tagen? Jedes Teil im Laden hat wird mit einen Wert von $ 100.00 bewertet, unabhängig vom gezahlten Preis.

Der Kassenbestand und der vorhandene Warenwert sind graphisch darzustellen.

Aufgabe 10.2: Tonkrugherstellung

Im Beispiel 6.1, Tonkrugherstellung, ist die Zeit für das Formen eines Topfes (Herstellungszeit) und die Brennzeit gleich verteilt im Intervall 30 +- 5 und 8 +- 2 Minuten. Nehmen wir nun an, das anstelle der Gleichverteilung für die Herstellungszeit und für die Brennzeit eine Verteilung entsprechend der folgenden Tabelle genutzt wird. Alle Angaben sind in Minuten.

Herstel-lungszeit	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
Anteil	.01	.03	.05	.10	.18	.26	.18	.10	.05	.03	.01

Brennzeit	6	7	8	9	10
Anteil	.05	.25	.40	.25	.05

Die Verteilungen sind **symmetrisch** und haben ihren Scheitelpunkt bei 30 und 8. Vergleichen Sie die Anzahl der hergestellten Töpfe mit denen des alten Programms für vier, fünf und sechs Mitarbeitern.